

Ziel:

Aus der Verdrillung von Metallstäben soll der Schubmodul der jeweiligen Materialien bestimmt werden, und zwar mit einer statischen und einer dynamischen Methode (Drehschwingungen).

Methoden:

Bei der statischen Methode wird ein Metallstab verdrillt. Das dazu nötige Drehmoment hängt von Winkel, Durchmesser und Länge des Stabes ab. Als Faktor tritt dabei der Schubmodul auf, der die Eigenschaften des Materials beschreibt. Der Schubmodul kann aber auch aus der Periodenlänge einer Drehschwingung bestimmt werden.

Erläuterungen:

Die beiden Methoden zur Bestimmung des Schubmoduls basieren auf unterschiedlichen zu messenden Grössen. Dabei wird vermutlich die eine Methode der anderen bezüglich Messgenauigkeit überlegen sein.

Theorie:

Dynamik, Rotation, Kraft, Drehmoment, Drehimpuls, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Schwingungen, Hookesches Gesetz

Literatur:

Lehrbuch: Metzler, S. 66 ff., S. 102 ff., Gerthsen S. 101 ff.

Physikalisches Praktikum: Walcher S. 60 ff.

Geräte:

1 Torsionsgerät Leybold

2 Laufgewichte

verschiedene Kraftmesser (Federwaagen, digitaler Kraftmesser Steinegger)

Stopuhr

Name:

 Klasse: **Tc 3**

Datum:

Beurteilung:

Auswertung

Genauigkeit

Fehlerrechnung/Fehlerdiskussion

Protokollführung

Summe

Grundlagen:

Elastizität

Auf einen Quader der Länge l und der Querschnittsfläche A wirkt eine Zug- (a) bzw. Druckkraft (b) F_n . Wenn diese Kraft über die Fläche gleichmässig verteilt ist, besteht eine Zug- bzw. Druckspannung

$$(1) \quad s = \frac{F_n}{A}.$$

Die relative Längenänderung ist proportional zur wirkenden Spannung. Es gilt:

$$(2a) \quad \frac{\Delta l}{l} \sim s$$

$$(2b) \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} s$$

(E = Elastizitätsmodul)

Wirken die Kräfte nicht normal sondern tangential zur Fläche A , so ergibt sich eine Scherung (c). Die Schubspannung t ist definiert durch:

$$(3) \quad t = \frac{F_t}{A}$$

Für den Scherungswinkel α gilt (bei kleinem Winkel α):

$$(4) \quad \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta x}{y} = \frac{1}{G} t \quad (G = \text{Schubmodul})$$

Die Gleichungen (2b) und (4) sind natürlich nur innerhalb des sogenannten Proportionalitätsbereiches gültig. Oberhalb dieses Bereiches erfolgt die Formänderung zunächst stärker als proportional, aber noch reversibel, dann nicht mehr reversibel (plastische Formänderung, fließen).

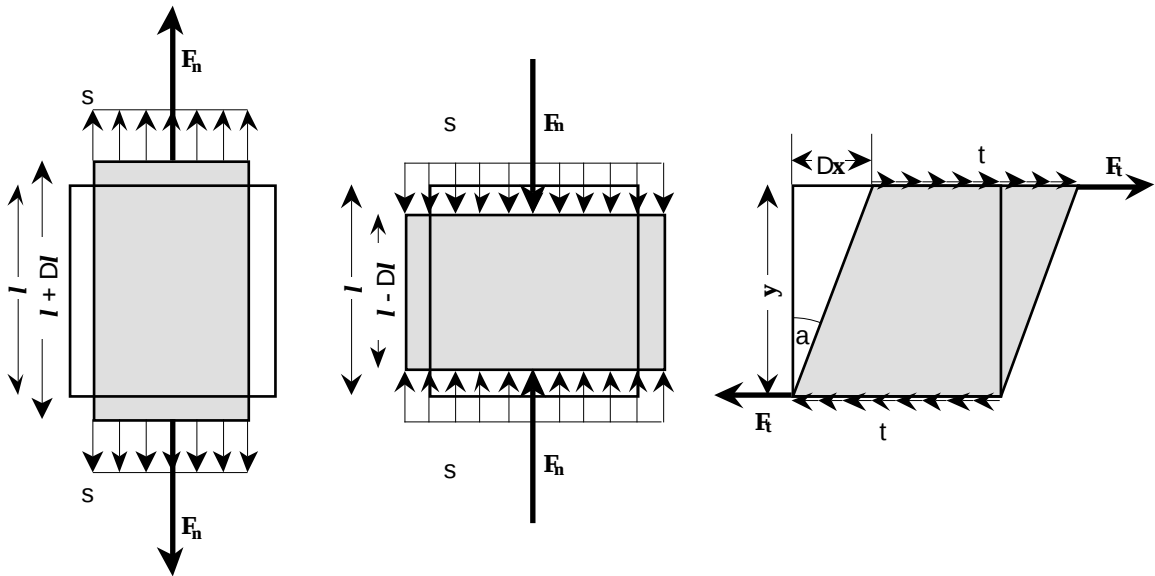


Abb. 1

a)

b)

c)

Torsion von Stäben

Ein dünner Rundstab von der Länge l und dem Radius r , der an einem Ende fest eingespannt ist, kann am anderen Ende verdreht werden. Das zum Verdrehen nötige Drehmoment M wird durch eine Kraft F im Abstand R von der Achse erzeugt. Wenn F senkrecht zum Radius R steht, gilt (Abb. 2):

$$(5) \quad M = F \cdot R.$$

Unter der Einwirkung von diesem Drehmoment wird der Stab am freien Ende um den Winkel j verdreht. Für das Drehmoment gilt nun:

$$(6) \quad M = -D \cdot j,$$

wobei D das Direktionsmoment des Stabes ist.

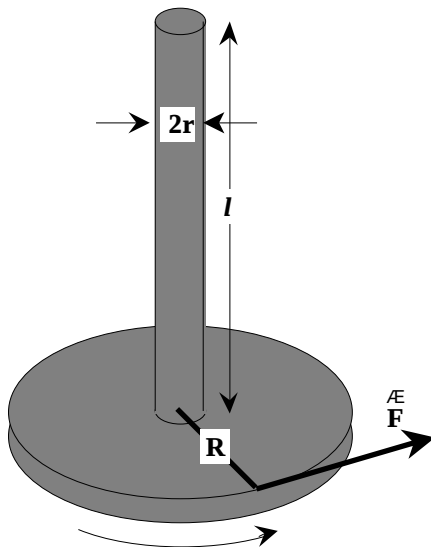


Abb. 2

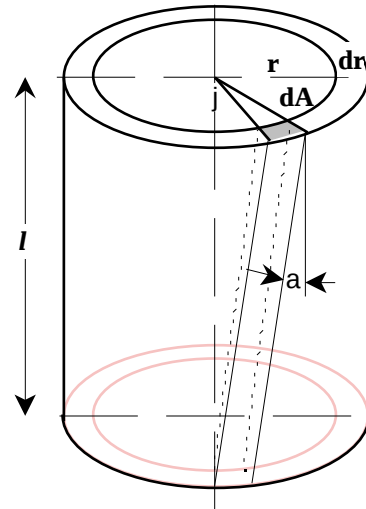


Abb. 3

Nach Gleichung (3) gilt $t = \frac{dF_t}{dA}$ und durch Umformen:

$$(7) \quad dF_t = t \cdot dA$$

Das Flächenelement dA kann nach Abb. 3 zu $dA = r \cdot d\varphi \cdot dr$ bestimmt werden. Da das Drehmoment um den ganzen Umfang des Stabes herum wirkt, erhält man für das Drehmoment für das zylindrische Rohr der Dicke dr jetzt:

$$(8) \quad dM = r \cdot dF_t = r \cdot t \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = r^2 t \cdot 2\pi \cdot dr$$

Aus Gleichung (4) folgt unter Berücksichtigung von Abb. 3 für t :

$$(9) \quad t = Ga = G \cdot \frac{r\varphi}{l}$$

Das gesamte Drehmoment auf den Zylinder ist nun:

$$(10) \quad M = \int_0^r 2\pi r^2 t \, dr = \int_0^r 2\pi r^2 G \cdot \frac{r\varphi}{l} \cdot dr = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^r r^3 \, dr = \frac{2\pi G}{l} \varphi \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{\pi G r^4}{2l} \cdot \varphi$$

Der letzte Bruch, der Faktor vor dem Winkel φ ist das Direktionsmoment D :

$$(11) \quad D = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Messmethoden und Messgeräte:

Bestimmung des Schubmoduls durch statische Verdrillung

Ein dünner, homogener Rundstab von der Länge l und dem Radius r wird an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende ist er mit einem Hebel verbunden, über den ein Drehmoment an das Stabende übertragen werden kann. Wirkt im Abstand R von der Achse des Stabes senkrecht zum Hebelarm, gilt nach (5), (6) und (11):

$$(12) \quad M = F \cdot R = -D \cdot j = -\frac{\rho G r^4}{2l} \cdot j$$

Stablänge l und Stabdurchmesser $2r$ sind gegeben, F und j werden gemessen. Aus Gleichung (12) kann der Schubmodul G berechnet werden.

Bestimmung des Schubmoduls aus Drehschwingungen

Wird das System aus Torsionsstab mit drehbarem Hebel aus der Ruhelage ausgelenkt, führt es eine Drehschwingung aus, welche durch die Differentialgleichung

$$(13) \quad J \ddot{j} + D j = 0 \quad (J = \text{Trägheitsmoment}, D = \text{Direktionsmoment})$$

beschrieben wird. Für die Schwingungsdauer erhält man:

$$(14) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

Um das Direktionsmoment D zu bestimmen, benötigt man T und J . T kann gemessen werden. J ist das Trägheitsmoment des gesamten Systems. Werden Laufgewichte von bekannter Masse am Hebel angebracht, vergrößert sich das Trägheitsmoment des System um das berechenbare Zusatzträgheitsmoment J' . Für die neue Periodenlänge T' gilt:

$$(15) \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{J + J'}{D}}$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) kann J eliminiert werden, es folgt dann:

$$(16) \quad T'^2 - T^2 = 4\pi^2 \frac{J'}{D}$$

Mit bekanntem D kann jetzt der Schubmodul G nach Gleichung (11) berechnet werden.

Durchführung des Experiments:

1. Bestätigen Sie durch eine Serie von Messungen die Zusammenhänge zwischen Drehmoment M , Drehwinkel j , Stablänge l und Stabdurchmesser $2r$. ($M \sim j$, $M \sim r^4$, $M \sim \frac{1}{l}$, vgl. (12))
2. Bestimmen Sie nach der statischen Methode den Schubmodul G für das angegebene Stabmaterial (genügende Anzahl Messungen).
3. Bestimmen Sie nach der dynamischen Methode (Drehschwingungen) ebenfalls den Schubmodul G für dasselbe Material wie in 2.

Stabmaterial:

Stahl

Messing

Kupfer

Aluminium