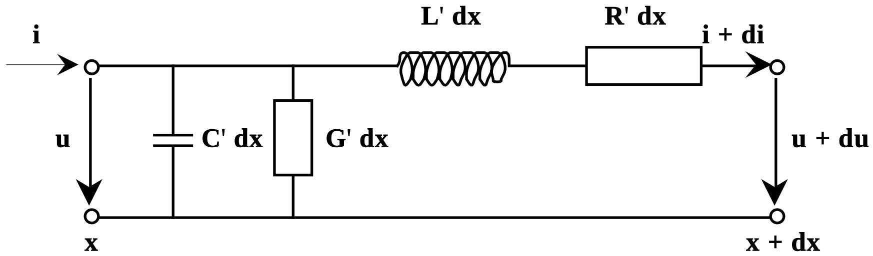
Modell einer Leitung:

Die Abbildung zeigt ein Ersatzschaltbild eines Leitungsstücks von x bis x + dx:



R', L', C', G' … Leitungsbeläge (d.h. z.B. Widerstand pro Meter Leitungslänge)
R = R'dx = Leitungswiderstand
G = G'dx = Ableitung (Leitwert)
L = L'dx = Induktivität
C = C'dx = Kapazität
Wird eine Wechselspannung an das Leitungsstück gelegt, fliesst Wechselstrom in die Leitung (Hinlaufen oder Vorlaufen der Welle). Gesucht ist nun der Wellenwiderstand der Leitung.

Mit Maschen- und Knotenregel kann man folgende Gleichungen aufschreiben:

(1) $$u = \frac{\partial i}{\partial t} L'\,dx + iR'\,dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

(2) $$i = \frac{\partial u}{\partial t} C'\,dx + uG'\,dx + i + \frac{\partial i}{\partial x}dx$$

Vereinfachen und umformen führt zu:

(3) $$-\frac{\partial u}{\partial x} = L'\frac{\partial i}{\partial t} + R'\,i$$

(4) $$-\frac{\partial i}{\partial x} = C'\frac{\partial u}{\partial t} + G'\,u$$

Nach weiterem Ableiten und Reduktion des Systems erhält man daraus die Telegraphengleichung:

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R'\,G'\,u + (R'\,C' + L'\,G')\frac{\partial u}{\partial t} + L'\,C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Im Spezialfall einer verlustlosen Leitung (R' = 0, G' = 0) ergibt sich:

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L'\,C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Die mathematische Lösung der Telegraphengleichung (5) führt zur Summe von zwei gegenläufigen Wellen (h = hinlaufend, r = rücklaufend):

(7) $$u(x,t) = U_F e^{(j\omega t - \gamma x)} + U_R e^{(j\omega t + \gamma x)} = U_F e^{j(\omega t - \beta x)} e^{-\alpha x} + U_R e^{j(\omega t + \beta x)} e^{\alpha x}$$
mit $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$

Dabei nennt man α das Dämpfungsmass und β die Phasenkonstante, γ heisst Fortpflanzungskonstante.

Setzt man dies in Gleichung (4) ein, erhält man nach Integration den Strom:

(8) $$i(x,t) = \frac{G' + j\omega C'}{\gamma}\left(U_F e^{(j\omega t - \gamma x)} - U_R e^{(j\omega t + \gamma x)}\right)$$

Der Wellenwiderstand, die Wellenimpedanz, wird als Quotient von u durch i bei der hinlaufenden Welle ermittelt:

(9) $$Z_L = \frac{\gamma}{G' + j\omega C} = \frac{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}}{G' + j\omega C} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C}}$$

Für den Fall der verlustlosen Leitung (also R' = 0 und G' = 0) ist die Wellenimpedanz:

(10) $$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C}}$$

Der Reflexionsfaktor r stellt das Verhältnis zwischen hin- und rücklaufender Welle dar:

(11) $$r = \frac{U_R e^{(j\omega t + \gamma x)}}{U_F e^{(j\omega t - \gamma x)}} = \frac{U_R}{U_F} e^{2\gamma x} = \frac{U_R}{U_F} e^{2\alpha x + 2j\beta x}$$

Die Impedanz an irgend einer Stelle der Leitung ist der Quotient u durch i der gesamten Welle. Man erhält nach Einsetzen und geeigneetes Kürzen:

(12) $$Z = \frac{u}{i} = Z_L \frac{1+r}{1-r}$$

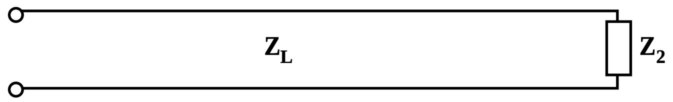
und auf r gelöst:

(13) $$r = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L}$$

Als Mass für den Anpassungsgrad eines Abschlusses wird in der Praxis das Verhältnis von U_{max} : U_{min} definiert und als Welligkeit (Voltage Standing Wave Ratio = VSWR) angegeben:

(8) $$VSWR = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_F + U_R}{U_F - U_R} = \frac{1+r}{1-r}$$

Fortschreitende Welle bei Anpasssung



Der Verbraucher Z_2 ist "angepasst", wenn $Z_2 = Z_L$ ist. In Gleichung (12) bedeutet dies, dass r = 0 wird. Dann aber gibt es keine reflektierte Welle (siehe Gl. 11).

Stehende Welle bei kurzgeschlossenem Ende

Bei Kurzschluss am Ende der Leitung wird die Welle reflektiert, und es kann am Ende ein Strommaximum beobachtet werden.

Stehende Welle bei offenem Ende

Ist die Leitung offen ($Z_2 = \infty$), wird am Ende die Spannung maximal und der Strom zu Null. Die Welle wird ebenfalls reflektiert.